

Análise de Pilares Esbeltos do Monotrilho de São Paulo sob Efeito de Não Linearidade Geométrica pelo Método dos Elementos Finitos

Gabriel P. Sanchis¹, Rui N. Oyamada², Carlos E. N. Mazzilli³

¹ Escola Politécnica Universidade de São Paulo / OUPEC Engenharia / gabriel.sanchis@usp.br

² Escola Politécnica da de São Paulo / OUPEC Engenharia / rui.oyamada@oupec.com.br

³ Escola Politécnica da Universidade da Universidade de São Paulo / PEF / cenmazzi@usp.br

Resumo

O monotrilho é frequentemente discutido como uma possível solução para os problemas de mobilidade urbana em São Paulo. A necessidade de sistemas de transporte alternativos, como o monotrilho, está ligada à busca por soluções eficientes, rápidas e menos impactantes ao meio ambiente. O monotrilho é um tipo de transporte que utiliza trilhos elevados, sendo o trilho a própria estrutura de concreto, denominada de viga guia. Este modal apresenta grandes desafios de construção uma vez que a cidade possui mais de 12 milhões de habitantes e uma infraestrutura complexa, o que gera uma quantidade significativa de interferências. Nesse cenário, a otimização das estruturas de concreto que formam o sistema se torna um ponto central para melhorar a eficiência, reduzir custos e garantir a sustentabilidade ao longo de sua vida útil. Dessa forma, as estruturas devem se tornar cada vez mais leves e, por consequência, esbeltas e flexíveis. Os deslocamentos das estruturas do sistema, uma vez que o trilho é a própria viga guia, são um dos fatores críticos que devem ser acompanhados e considerados no dimensionamento das estruturas do monotrilho, especialmente porque estes estão diretamente relacionados ao comportamento dinâmico da estrutura, a segurança e conforto dos usuários e a durabilidade do sistema. Os deslocamentos podem ocorrer por diversos motivos, desde o uso normal da linha, variações térmicas, e até mesmo o impacto de cargas excepcionais. Portanto, o dimensionamento adequado deve considerar esses fatores para garantir a estabilidade e a integridade estruturais. Este trabalho faz o estudo de um apoio com solução do tipo “estaca-pilar”, pouco utilizada na linha estudada. A utilização desta dependerá diretamente dos deslocamentos obtidos. No decorrer do trabalho verificaremos que as equações diferenciais que governam o problema proposto são não lineares e o equilíbrio dinâmico do sistema é obtido a partir do princípio dos trabalhos virtuais. Utilizaremos o método implícito de Newmark para resolver a integração ao longo do tempo e o método de Newton-Raphson para resolução da equação algébrica não linear do movimento.

Palavras-chave

Monotrilho; deslocamentos; não linearidade geométrica; pilares.

Introdução

A importância da análise dinâmica das estruturas tem crescido muito nas últimas décadas, uma vez que o avanço da tecnologia proporciona materiais mais resistentes e estruturas mais esbeltas. Com isso, em determinadas situações de geometria e carregamento, as estruturas apresentam problemas que antes não eram observados, como vibrações e deslocamentos excessivos e até mesmo perda de estabilidade o que torna essencial a análise dinâmica.

Este trabalho, teórico, apresentará uma formulação de elemento finito de barra baseado nas hipóteses cinemáticas de Timoshenko para a seção transversal. A seção é inicialmente ortogonal ao eixo da barra e após a deformação continuará plana, todavia apresentará uma rotação θ em relação ao eixo deformado.

O equilíbrio dinâmico do sistema foi obtido a partir do princípio dos trabalhos virtuais. A principal razão dessa formulação ser efetiva é que as condições de contorno naturais são sempre satisfeitas [1], ou seja, se em um sistema o trabalho virtual das forças externas, incluindo-se nelas as forças de inércia, é igual ao trabalho virtual das forças internas, então essa é uma condição necessária e suficiente para que a barra esteja externa e internamente em equilíbrio dinâmico.

É importante mencionar que o Método dos Elementos Finitos (MEF) só irá resolver o modelo matemático proposto, com as hipóteses já definidas. Não podemos esperar que o método forneça uma previsão do problema físico com mais informações do que aquelas que já estão no modelo matemático proposto. Dessa

forma, o modelo matemático escolhido para cada análise é de fundamental importância e determina o que podemos ou não obter em cada análise. Para escolher os modelos matemáticos mais adequados devemos escolher aqueles que são confiáveis e eficazes. A eficácia dos modelos está ligada a uma resposta suficientemente precisa (precisão a ser definida pelo engenheiro) e que leva a um menor custo computacional. Podemos dizer que um modelo matemático é confiável se a resposta obtida for coerente, dado um certo nível de precisão, com o modelo físico estudado, assim é necessário um profundo conhecimento do comportamento no problema proposto.

No decorrer do trabalho, conforme já mencionado, verificaremos que as equações diferenciais que governam o problema proposto são não lineares. Dessa forma, apresentaremos uma teoria estrutural para barras retas, com seção transversal constante e indeformável em seu plano, considerando os efeitos dinâmicos. A formulação aplicada foi a Lagrangeana Total, obtendo assim uma descrição completa do movimento com base na configuração de referência do modelo matemático, fato importante na elaboração de uma teoria não linear em que o equilíbrio dinâmico acontece na configuração deformada.

Após desenvolvermos algebricamente a equação não linear do movimento, introduzimos a discretização típica do MEF e montamos as matrizes de rigidez, massa e amortecimento proporcional, esta última de forma *ad hoc*. Com o objetivo de solucionar o sistema não linear de equações diferenciais do movimento será utilizado o método de integração direta passo-a-passo de Newmark. Em cada intervalo de tempo, a equação não linear é resolvida pelo método de Newton-Raphson.

Hipóteses simplificadoras do modelo

Como hipóteses simplificadoras do modelo estrutural proposto, serão adotadas:

- Material elástico linear, homogêneo e isótropo.
- Distorção conforme modelo de Timoshenko.
- Deslocamentos, rotações e deformações finitas.
- Barra prismática com eixo reto.
- Seção transversal permanece plana e indeformável, ou seja, não serão incluídas deformações por empenamento da seção transversal.
- A densidade não será alterada durante a movimento, ou seja, o volume da configuração de referência será mantido na configuração deformada.

Desenvolvimento teórico: cinemática

Ao longo do texto usaremos vetores e tensores. Os vetores serão denotados por letras minúsculas em negrito enquanto tensores e matrizes serão denotados por letras maiúsculas em negrito. Seja um elemento de barra 3D de seção transversal A^r , em equilíbrio dinâmico, sujeito a forças $\mathbf{f}(x_3^r, t)$ impostas ao longo do comprimento L^r , conforme representado na Figura 1.

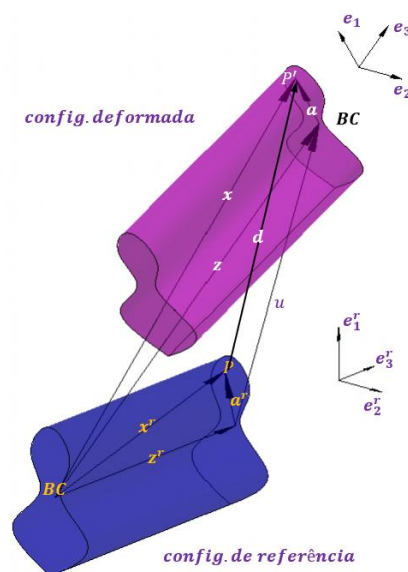


Figura 1 – Representação dos deslocamentos ($\mathbf{u}$) do baricentro e de um ponto genérico ($\mathbf{d}$) do elemento
Na configuração de referência temos o vetor posição $\mathbf{z}^r(x_3^r)$, $\mathbf{a}^r(x_1^r, x_2^r)$ e $\mathbf{x}^r(x_1^r, x_2^r, x_3^r)$ que representam respectivamente o baricentro, o vetor posição de um ponto genérico da seção transversal em relação ao baricentro e o vetor posição em relação à origem, definidos por:

$$\mathbf{z}^r = x_3^r \mathbf{e}_3^r \quad (1)$$

$$\mathbf{a}^r = x_1^r \mathbf{e}_1^r + x_2^r \mathbf{e}_2^r \quad (2)$$

$$\mathbf{x}^r = \mathbf{z}^r + \mathbf{a}^r \quad (3)$$

onde o vetor $\{\mathbf{e}_1^r, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r\}$ representa a base ortonormal na configuração de referência. Na configuração deformada temos os vetores $\mathbf{z}$, $\mathbf{a}$ e $\mathbf{x}$ agora representados na nova configuração (atual). Definem-se os vetores $\mathbf{u}(x_1^r, x_2^r, x_3^r, t)$, indicando o deslocamento do baricentro da seção transversal, e $\mathbf{d}(x_1^r, x_2^r, x_3^r, t)$ indicando o deslocamento de um ponto qualquer da seção, e o tensor das rotações $\mathbf{Q}(x_3^r, t)$. Em notação vetorial temos:

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}^r + \mathbf{u} \quad (4)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{Q} \mathbf{a}^r \quad (5)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{a} = \mathbf{z}^r + \mathbf{u} + \mathbf{Q} \mathbf{a}^r \quad (6)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{u} + \mathbf{Q} \mathbf{a}^r - \mathbf{a}^r \quad (7)$$

onde $\mathbf{Q}$ é o tensor ortogonal das rotações das seções transversais, obtido através da fórmula de Euler-Rodrigues:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} + \frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{\Theta} + \frac{(1 - \cos \theta)}{\theta^2} \mathbf{\Theta}^2 \quad (8)$$

onde $\mathbf{\Theta}$ é o tensor antissimétrico cujo vetor axial é $\boldsymbol{\theta}$. Este último representa o pseudovetor rotação dado por:

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T \quad (9)$$

com norma euclidiana $\theta = \|\boldsymbol{\theta}\|$

Equações De Equilíbrio

A expressão dos trabalhos virtuais em processos dinâmicos é dada por:

$$\delta W_{ext} = \delta W_{int}, \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (10)$$

onde δW_{ext} é o trabalho virtual das forças externas, incluindo as inerciais, e δW_{int} é o trabalho virtual dos esforços internos. As expressões a seguir definem as grandezas supracitadas:

$$\delta W_{ext} = \int_{L^r} (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{d}) dx_3^r - \int_{V^r} \rho^r (\ddot{\mathbf{d}} \cdot \delta \mathbf{d}) dV^r \quad (11)$$

$$\delta W_{int} = \int_{V^r} (\mathbf{S} : \delta \mathbf{E}) dV^r \quad (12)$$

onde:

$\mathbf{f}$: forças e momentos externos aplicados no elemento,

$\mathbf{S}$: segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff,

$\delta \mathbf{E}$: variação virtual das deformações de Green-Lagrange,

$\delta \mathbf{d}$: deslocamentos virtuais; serão entendidos aqui como deslocamentos cinematicamente admissíveis em um certo instante t , ou seja, nesse instante respeitam as condições de vínculo,

$\ddot{\mathbf{d}}$: aceleração,

ρ^r : massa específica da barra na configuração de referência.

Na equação (11) foi introduzida a notação " $\cdot$ " que denota o produto escalar entre dois vetores, enquanto na equação (12) a notação ":" representa o produto escalar entre dois tensores. Também foi usada a notação $\left(\frac{d}{dt} \right)$ denotando a diferenciação no tempo, ou seja, $\frac{d(\cdot)}{dt} = \left(\dot{\cdot} \right)$. Neste trabalho utilizamos, como já dito, uma formulação Lagrangeana Total (LT) em que todas as soluções da equação do movimento se referem à configuração de referência [1]. Por optarmos por uma formulação LT, vamos utilizar o par conjugado de tensores $\mathbf{S}$ e $\delta \mathbf{E}$, pois estes se referem à configuração de referência e não são alterados por movimentos de corpo rígido.

Equações De Compatibilidade

O gradiente dos deslocamentos para o movimento do elemento é expresso por:

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial x_1^r} \otimes \mathbf{e}_1^r + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial x_2^r} \otimes \mathbf{e}_2^r + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial x_3^r} \otimes \mathbf{e}_3^r. \quad (13)$$

e o tensor das deformações de Green Lagrange pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (14)$$

onde $\mathbf{F}$ é o gradiente das transformações; após algumas manipulações podemos escrever:

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q}(\mathbf{I} + \boldsymbol{\gamma}^r \otimes \mathbf{e}_3^r) \quad (15)$$

Na equação (15) foi introduzida a notação " $\otimes$ " que denota o produto tensorial entre dois vetores, resultando um tensor de terceira ordem. Dessa forma podemos reescrever a equação (14) para deformações, deslocamentos e rotações finitas da seguinte forma:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}((\boldsymbol{\gamma}^r \otimes \mathbf{e}_3^r)^T + \boldsymbol{\gamma}^r \otimes \mathbf{e}_3^r) \quad (16)$$

onde:

$$\boldsymbol{\gamma}^r = \boldsymbol{\eta}^r + \boldsymbol{\kappa}^r \times \mathbf{a}^r \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}' + \mathbf{e}_3^r - \mathbf{Q}\mathbf{e}_3^r \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\theta}' \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\eta}^r = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\eta} \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\kappa}^r = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\kappa} \quad (21)$$

Nas equações acima foram introduzidos os vetores $\boldsymbol{\eta}$ e $\boldsymbol{\kappa}$, de grande importância na formulação do problema, que representam os componentes das deformações. Todavia, estes vetores ainda são afetados por movimentos de corpo rígido, violando o princípio da objetividade, dessa forma os mesmos foram retro rotacionados, conforme equações (20) e (21). Após algumas manipulações algébricas é fácil obter o gradiente das deformações de Green-Lagrange em sua forma simétrica:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_1^r \\ 0 & 0 & \gamma_2^r \\ \gamma_1^r & \gamma_2^r & 2\gamma_3^r \end{bmatrix} \quad (22)$$

Da equação (22) nota-se que não ocorrem alongamentos nas direções de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$, bem como não há distorções no plano formado pelos eixos $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$, o que confirma as hipóteses de a seção transversal permanecer plana e indeformável. Podemos reescrever o gradiente das deformações somente com as componentes não nulas convenientemente, na forma matricial:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \eta_1^r - \kappa_3^r x_2^r \\ \eta_2^r + \kappa_3^r x_1^r \\ \eta_3^r + \kappa_1^r x_2^r - \kappa_2^r x_1^r \end{bmatrix} = \boldsymbol{\eta}^r + \boldsymbol{\kappa}^r \times \mathbf{a}^r \quad (23)$$

Por simples inspeção da expressão (23), verificamos a relação entre o vetor $\boldsymbol{\kappa}^r$ (não é a curvatura), da análise geométrica não linear, e o vetor $\boldsymbol{\theta}'$ do modelo sob linearidade geométrica, onde ambos se relacionam com a rotação específica da seção transversal, enquanto o vetor $\boldsymbol{\eta}^r$ relaciona-se com os alongamentos.

Equações Constitutivas

Finalmente, um material elástico linear (linearidade física), isótropo e homogêneo pode ser representado pelo par energeticamente conjugado $\{\mathbf{S}, \mathbf{E}\}$ na Lei de Hooke Generalizada:

$$\mathbf{S} = \lambda \text{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} \quad (24)$$

onde $\mathbf{S}$ é o segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff, $\mathbf{E}$ o tensor de Green-Lagrange, λ e μ são as constantes de Lamé, dadas por:

$$\lambda = \frac{Ev}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (25)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad (26)$$

Como já mencionado no início deste trabalho, foi desenvolvida uma teoria Lagrangeana Total (LT). Dessa forma os tensores das deformações e das tensões foram escolhidos de tal forma que estes atendam ao princípio da objetividade, ou seja, não podem sofrer alterações quando submetidos a movimentos de corpos rígidos [1].

Nos próximos itens trabalharemos com o par conjugado $\mathbf{P}:\delta\mathbf{F}$, dessa forma após algumas manipulações algébricas:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\tau}_1^r \otimes \mathbf{e}_1 + \boldsymbol{\tau}_2^r \otimes \mathbf{e}_2 + \boldsymbol{\tau}_3^r \otimes \mathbf{e}_3) \quad (27)$$

onde $\mathbf{P}$ é o primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff e o novo vetor, que desenvolverá trabalho na teoria proposta é:

$$\boldsymbol{\tau}_3^r = \begin{bmatrix} \gamma_1^r \gamma_3^r (\lambda + 2\mu) + \mu \gamma_1^r \\ \gamma_2^r \gamma_3^r (\lambda + 2\mu) + \mu \gamma_2^r \\ (\lambda + 2\mu)(\gamma_3^r)^2 + (\lambda + 2\mu)\gamma_3^r \end{bmatrix} \quad (28)$$

Em (28) é possível perceber que há termos não lineares nas deformações, reforçando a presença da não linearidade no modelo matemático proposto.

Trabalho Virtual Interno

O trabalho virtual interno é dado pela seguinte equação:

$$\delta W_{int} = \int_{L^r} \int_{A^r} (\mathbf{S}:\delta\mathbf{E}) dA^r dx_3^r = \int_{L^r} \boldsymbol{\sigma}^r \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon}^r dx_3^r \quad (29)$$

onde o tensor das deformações de Green-Lagrange é energeticamente conjugado com o segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff. A equação acima utiliza a tensão $\mathbf{S}$ na configuração deformada, baseada na área da configuração de referência (tensão nominal), diferentemente do tensor das tensões de Cauchy, em que as tensões são observadas na configuração deformada. Os novos vetores $\boldsymbol{\sigma}^r$ e $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^r$ são dados por:

$$\boldsymbol{\sigma}^r = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^r \\ \mathbf{m}^r \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad (30)$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^r = \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\eta}^r \\ \delta\boldsymbol{\kappa}^r \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad (31)$$

$\mathbf{n}^r$ e $\mathbf{m}^r$ podem ser interpretados como as forças e os momentos internos resultantes, ambos retro rotacionados da seção transversal:

$$\mathbf{n}^r = \int_{A^r} \boldsymbol{\tau}_3^r dA^r \quad (32)$$

$$\mathbf{m}^r = \int_{A^r} (\mathbf{a}^r \times \boldsymbol{\tau}_3^r) dA^r \quad (33)$$

e

$$\delta\boldsymbol{\eta}^r = \mathbf{Q}^T(\delta\mathbf{u}' + \mathbf{Z}'\boldsymbol{\Gamma}\delta\boldsymbol{\theta}) \quad (34)$$

$$\delta\boldsymbol{\kappa}^r = \mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\Gamma}'\delta\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\Gamma}\delta\boldsymbol{\theta}') \quad (35)$$

$\mathbf{Z}'$ é o tensor antissimétrico cujo vetor axial é:

$$\mathbf{z}' = \mathbf{e}_3^r + \mathbf{u}' \quad (36)$$

Nas equações acima foi introduzida a notação $(\cdot)'$ que representa a derivada em relação x_3 . O trabalho virtual interno pode ser reescrito como:

$$\delta W_{int} = \int_{L^r} (\boldsymbol{\Psi}\Delta\delta\bar{\mathbf{d}})^T \boldsymbol{\sigma}^r dx_3^r \quad (37)$$

onde Δ é um operador diferencial e $\boldsymbol{\Psi}$ apresenta em sua composição o tensor antissimétrico diferencial $\mathbf{Z}'$, conforme visto em (36). Dessa forma:

$$(x_3, t) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T & \mathbf{Q}^T\mathbf{Z}'\boldsymbol{\Gamma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^T\boldsymbol{\Gamma}' & \mathbf{Q}^T\boldsymbol{\Gamma} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_3^r} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial x_3^r} \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\delta\bar{\mathbf{d}}(x_3, t) = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{u} \\ \delta\boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \quad (40)$$

Trabalho Virtual Externo

O trabalho virtual externo é dado pela seguinte equação:

$$\delta W_{forças\ ext} = \int_{L^r} \mathbf{f}^r \cdot \delta \mathbf{d}_{NL} dx_3^r \quad (41)$$

onde o deslocamento virtual, após alguns passos algébricos é:

$$\delta \mathbf{d}_{NL} = \delta \mathbf{u} + \mathbf{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{Q} \mathbf{a}^r \quad (42)$$

Retomando (41):

$$\delta W_{forças\ ext} = \int_{L^r} \overline{\mathbf{n}}^r \cdot \delta \mathbf{u} dx_3^r + \int_{L^r} \mathbf{\Gamma}^T \overline{\mathbf{m}}^r \cdot \delta \boldsymbol{\theta} dx_3^r \quad (43)$$

onde da mesma forma que os termos $\mathbf{n}^r$ e $\mathbf{m}^r$ (dos esforços internos), temos os seguintes termos relacionados ao carregamento aplicado, sendo respectivamente o termo das forças externas distribuídas e os momentos externos distribuídos ao longo do elemento de barra:

$$\overline{\mathbf{n}}^r(x_3, t) = \mathbf{f}^r = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$\overline{\mathbf{m}}^r(x_3, t) = \mathbf{m}^r = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} \quad (45)$$

sendo $\overline{\mathbf{n}}^r$ o vetor das forças externas distribuídas e $\overline{\mathbf{m}}^r$ o vetor dos momentos externos distribuídos. Retomando em (43) e reescrevendo de forma matricial:

$$\delta W_{ext} = \int_{L^r} \delta \bar{\mathbf{d}}^T \bar{\mathbf{q}}^r dx_3^r \quad (46)$$

onde foi introduzido o vetor $\bar{\mathbf{q}}^r$ das forças externas e $\delta \bar{\mathbf{d}}$ dos deslocamentos virtuais generalizados já definido em (40)

$$\bar{\mathbf{q}}^r = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{n}}^r \\ \mathbf{\Gamma}^T \overline{\mathbf{m}}^r \end{bmatrix} \quad (47)$$

Trabalho Virtual das Forças de Inércia

variação virtual do trabalho das forças de inércia é dada por:

$$\delta W_{forças\ inércia} = \rho^r \int_{L^r} \int_{A^r} (\ddot{\mathbf{d}}_{NL} \cdot \delta \mathbf{d}) dA^r dx_3^r \quad (48)$$

a aceleração pode ser desenvolvida por simples derivação em relação ao tempo, ficando claro que o termo das forças de inércia é uma equação diferencial:

$$\mathbf{d}_{NL} = \mathbf{u} + \mathbf{a} - \mathbf{a}^r \quad (49)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{NL} = \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{a}$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{NL} = \ddot{\mathbf{u}} + (\mathbf{\Gamma} \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\mathbf{\Gamma}} \dot{\boldsymbol{\theta}}) \times \mathbf{Q} \mathbf{a}^r + \mathbf{\Gamma} \dot{\boldsymbol{\theta}} \times (\mathbf{\Gamma} \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{Q} \mathbf{a}^r) = \ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{u}}_{euler} + \ddot{\mathbf{u}}_{centrifuga}$$

Introduzimos na equação (49) o tensor das velocidades angulares $\boldsymbol{\Omega}$, que é definido da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T \quad (50)$$

Na equação (49) foi possível distinguir as acelerações em 3 parcelas, sendo:

- Aceleração de Einstein: $\ddot{\mathbf{u}}$
- Aceleração de Euler: $\ddot{\mathbf{u}}_{euler} = (\mathbf{\Gamma} \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\mathbf{\Gamma}} \dot{\boldsymbol{\theta}}) \times \mathbf{Q} \mathbf{a}^r$
- Aceleração Centrífuga: $\ddot{\mathbf{u}}_{centrifuga} = \mathbf{\Gamma} \dot{\boldsymbol{\theta}} \times (\mathbf{\Gamma} \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{Q} \mathbf{a}^r)$

Não compareceu a aceleração de Coriolis devido às hipóteses simplificadoras do problema, ou seja, não foi considerada excitação de suporte. Retomando a equação da variação virtual do trabalho das forças de inércia em sua forma matricial:

$$W_{f\ inercia} = \rho^r \int_{L^r} \delta \bar{\mathbf{d}}^T \boldsymbol{\Lambda}^r dx_3^r \quad (51)$$

sendo:

$$\boldsymbol{\Lambda}^r = \begin{bmatrix} A^r \ddot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2 \\ \mathbf{\Gamma}^T (\boldsymbol{\pi}_1 + \boldsymbol{\pi}_2 + \boldsymbol{\pi}_3) \end{bmatrix} \quad (52)$$

e os novos vetores:

$$\lambda_1 = \int_{A^r} \ddot{\mathbf{u}}_{\text{euler}} dA^r = \int_{A^r} (\mathbf{\Gamma} \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\mathbf{\Gamma}} \dot{\boldsymbol{\theta}}) \times \mathbf{Q} \mathbf{a}^r dA^r \quad (53)$$

$$\lambda_2 = \int_{A^r} \ddot{\mathbf{u}}_{\text{centrifuga}} dA^r = \int_{A^r} \mathbf{\Gamma} \dot{\boldsymbol{\theta}} \times (\mathbf{\Gamma} \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{Q} \mathbf{a}^r) dA^r \quad (54)$$

$$\pi_1 = \int_{A^r} \mathbf{Q} \mathbf{a}^r \times \ddot{\mathbf{u}} dA^r \quad (55)$$

$$\pi_2 = \int_{A^r} \mathbf{Q} \mathbf{a}^r \times \ddot{\mathbf{u}}_{\text{euler}} dA^r = \int_{A^r} \mathbf{Q} \mathbf{a}^r \times ((\mathbf{\Gamma} \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\mathbf{\Gamma}} \dot{\boldsymbol{\theta}}) \times \mathbf{Q} \mathbf{a}^r) dA^r \quad (56)$$

$$\pi_3 = \int_{A^r} \mathbf{Q} \mathbf{a}^r \times \ddot{\mathbf{u}}_{\text{centrifuga}} dA^r = \int_{A^r} \mathbf{Q} \mathbf{a}^r \times (\mathbf{\Gamma} \dot{\boldsymbol{\theta}} \times (\mathbf{\Gamma} \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{Q} \mathbf{a}^r)) dA^r \quad (57)$$

Equação do Movimento

Como já descrito no início desse trabalho, o equilíbrio dinâmico foi obtido através do princípio dos trabalhos virtuais, que é uma condição necessária e suficiente para que a barra esteja externa e internamente em equilíbrio dinâmico. Com o auxílio de (37), (46) e (51) temos a equação equilibrada (balanceada) do movimento em sua forma fraca:

$$\int_{L^r} [(\boldsymbol{\Psi} \Delta \delta \bar{\mathbf{d}})^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^r - \delta \bar{\mathbf{d}}^T \bar{\mathbf{q}}^r + \rho^r \delta \bar{\mathbf{d}}^T \boldsymbol{\Lambda}^r] dx_3^r = 0, \quad \forall \delta \bar{\mathbf{d}} \quad (58)$$

Método Dos Elementos Finitos

Utilizaremos os recursos do método dos elementos finitos resolução do modelo matemático estudado acima. Consideremos um ponto genérico do elemento finito (e), o vetor posição no instante t , em relação a um sistema de referência absoluto ($0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$), expresso por:

$$\mathbf{x}^e = \mathbf{x}_0^e + \mathbf{d}_{NL}^e \quad (59)$$

Considerando-se a discretização introduzida pelo método dos elementos finitos, o deslocamento $\mathbf{d}_{NL}^e$ pode ser calculado a partir dos deslocamentos nodais $\bar{\mathbf{d}}$, que são as coordenadas generalizadas (ou deslocamentos generalizados). Para o modelo discreto, utilizaremos a matriz das funções de interpolação $\mathbf{H}^e$ do campo de deslocamentos no domínio do elemento finito (e), onde:

$$\mathbf{d}_{NL}^e = \mathbf{H}^e \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}}^{j,e} \\ \bar{\mathbf{d}}^{k,e} \end{bmatrix} = \mathbf{H}^e \bar{\mathbf{U}}^e \quad (60)$$

onde $\bar{\mathbf{d}}^{k,e}$ e $\bar{\mathbf{d}}^{j,e}$ são os deslocamentos e rotações do nó inicial (j) e nó final (k), respectivamente, de um elemento e $\bar{\mathbf{U}}^e$ os deslocamentos generalizados de cada elemento. A Figura 2 representa os deslocamentos generalizados para cada elemento da barra prismática em sua forma 2D.

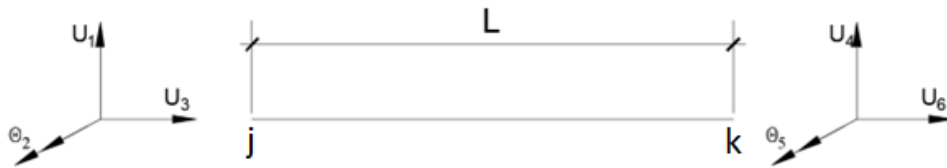


Figura 2 – Deslocamentos generalizados para o elemento de barra 2D

Considerando que não haja excitação de suporte, as velocidades e acelerações serão dadas respectivamente por:

$$\dot{\bar{\mathbf{d}}}^e = \mathbf{H}^e \dot{\bar{\mathbf{U}}}^e \quad (61)$$

$$\ddot{\bar{\mathbf{d}}}^e = \mathbf{H}^e \ddot{\bar{\mathbf{U}}}^e \quad (62)$$

e por fim os deslocamentos virtuais generalizados do elemento:

$$\delta \bar{\mathbf{d}}^e = \mathbf{H}^e \delta \bar{\mathbf{U}}^e \quad (63)$$

O vetor elementar das forças nodais desbalanceadas é dado então por:

$$\boldsymbol{\Pi}^e = \delta \bar{\mathbf{U}}^{eT} \int_{L^r} ((\boldsymbol{\Psi} \Delta \mathbf{H}^e)^T \boldsymbol{\sigma}^r - \mathbf{H}^{eT} \bar{\mathbf{q}}^r + \rho^r \mathbf{H}^{eT} \boldsymbol{\Lambda}^r) dx_3^r \quad (64)$$

Para encontrarmos a solução da equação diferencial não linear (64), em todo o intervalo de interesse, foi utilizado o método implícito de integração direta de Newmark, no qual as novas variáveis a serem determinadas dependem de valores no mesmo passo, junto com o método de Newton-Raphson, não sendo necessária uma transformação das equações em formas diferenciais. A integração passo a passo foi escolhida, pois trata-se de uma análise não linear, visto que, obviamente, seria incorreto aplicar métodos que usam superposição de efeitos.

Estudo de caso

A formulação proposta acima foi aplicada no estudo de um elemento do tipo “estaca-pilar”, da extensão do Monotrilho da linha 15-Prata do METRO. Por ser uma solução não usual, iremos utilizar um apoio que ainda está em estudo, localizado no Pátio Ragueb Chohfi, Módulo 19, eixo 19-P1. O presente módulo é composto por 2 vãos de aproximadamente 22,60m, com traçado curvo em planta de raio 50m, conforme a Figura 3. A fundação deste eixo tem como solução estaca escavada de grande diâmetro (Ø120cm) e comprimento de 12m, a partir da cota de arrasamento. Por se tratar de traçado curvo em planta, temos efeitos significativos das seguintes forças horizontais: força de impacto lateral, força centrífuga e forças de aceleração/ frenagem.

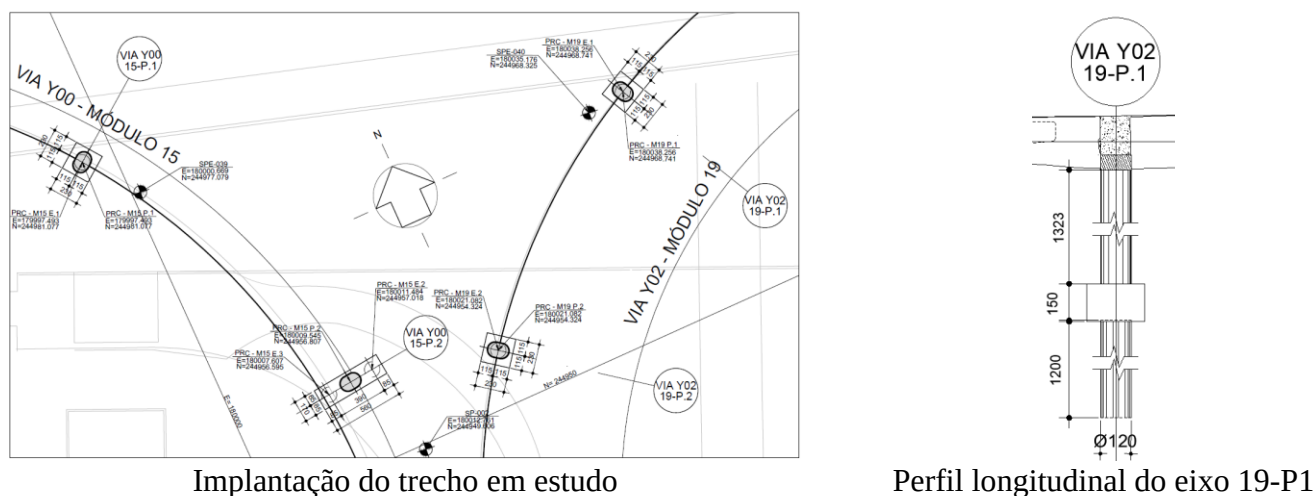
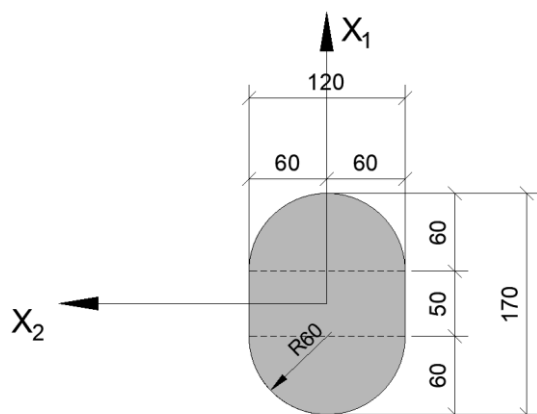


Figura 3 – Geometria do trecho em estudo



Características geométricas do pilar:

- Altura: 12,23m
- Área: $A = 1,731\text{m}^2$
- Momento de inércia em torno de x_2 : $I_2 = 0,320\text{m}^4$

Características geométricas da estaca:

- Comprimento: 12m
- Área: $A = 1,73\text{m}^2$
- Momento de inércia em torno de x_2 : $I_2 = 0,102\text{m}^4$

Módulo de elasticidade:

$$E_{\text{estaca}} = 27\text{GPa}, E_{\text{pilar}} = 30\text{GPa}$$

Índice de esbeltez transversal aproximado: $\lambda = 100$

Carga crítica estimada: $P_{cr} = 2800tf$

Figura 4 – Características geométricas dos elementos

Para a modelagem do estudo de caso, foram feitas as seguintes considerações:

- Os esforços solicitantes no topo do pilar (provenientes da viga guia) foram fornecidos, também, pela OUTEC ENGENHARIA. Estes foram extraídos de um modelo computacional completo com toda a estrutura, elaborado no software de elementos finitos SAP2000. Trata-se de uma modelagem quase estática para pequenos deslocamentos. As cargas provenientes do material rolante foram majoradas pelo coeficiente de amplificação dinâmica, fornecido pelo fabricante do material rodante, com passos de aproximadamente 1m e velocidades conhecidas. Dessa forma é possível a obtenção de cargas equivalentes em função do tempo para a aplicação neste estudo de caso.

- A interação solo-estrutura foi simplificada considerando engastamento perfeito da estaca a uma profundidade de três diâmetros, ou seja, a 3,6m de profundidade a partir da cota de arrasamento.
- A rigidez para os deslocamentos transversais da viga guia somente foi considerada na obtenção dos esforços provenientes da superestrutura.

A Figura 5 resume o modelo de cálculo adotado para este estudo de caso

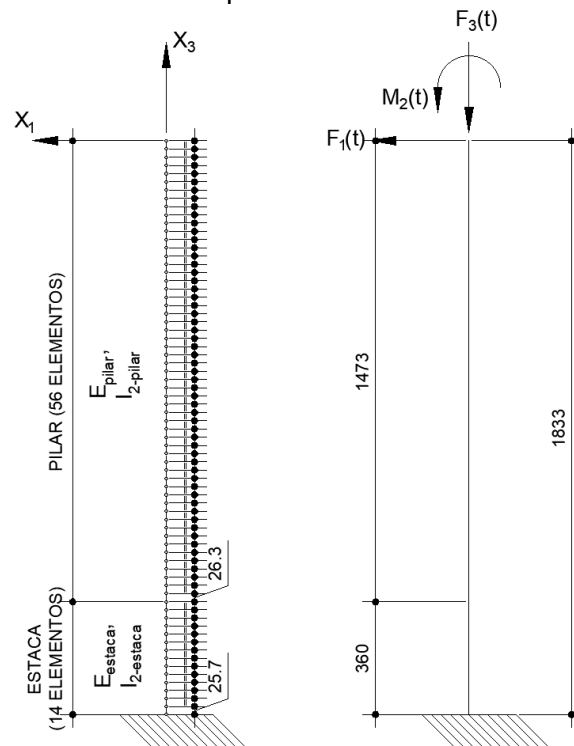


Figura 5 – Modelo de cálculo em estudo

O modelo de cálculo elaborado é composto por:

- 70 elementos finitos de dois nós. Cada elemento possui aproximadamente 25cm de comprimento,
- 71 nós,
- 2 tipos de seções transversais, já apresentadas na Figura 4,
- 2 tipos de materiais, também já apresentados na Figura 4,
- A vinculação da base da estaca é do tipo engaste perfeito, restringindo as translações e a rotação.
- As direções globais e locais se confundem e estão apresentadas também na Figura 4.

Os gráficos das Figura 6, Figura 7 e Figura 8, apresentam os carregamentos dinâmicos aplicados no topo do pilar-estaca ao longo da passagem do trem tipo. O gráfico da Figura 6 apresenta histórico da força axial do topo do pilar-estaca, com amplitude máxima de aproximadamente 70tf (700kN) aos 10s. No segundo gráfico (Figura 7) vemos a máxima amplitude da força transversal de 3,5tf (35kN) iniciando aos 6s e decaindo aos 10s. Na Figura 8 apresentamos histórico do momento transversal ao longo do tempo, com amplitude máxima de 7tf.m (70kN.m) aos 2,5s.

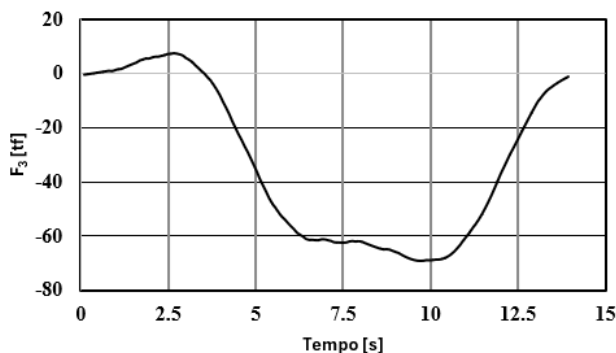


Figura 6 – tempo - força axial

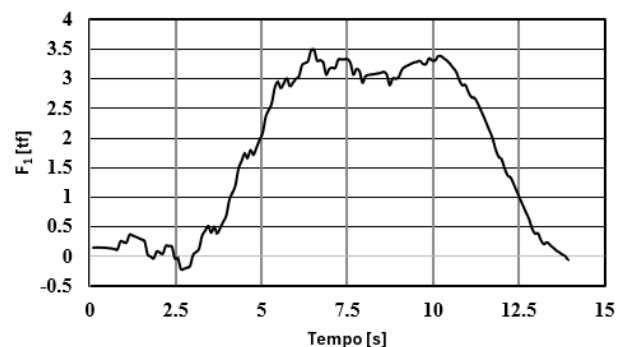


Figura 7 - tempo - força transversal

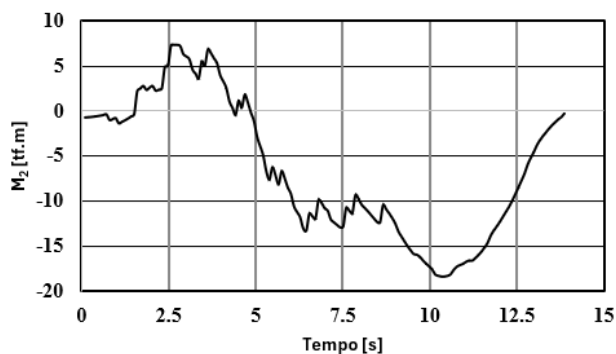


Figura 8 - tempo – momento transversal

Resultados

Os deslocamentos obtidos no nó de controle (topo do pilar), a partir da teoria de barras elaborada, estão apresentados na **Erro! Fonte de referência não encontrada..** A Figura 9 apresenta os resultados extraídos de um modelo similar elaborado no software SAP2000.

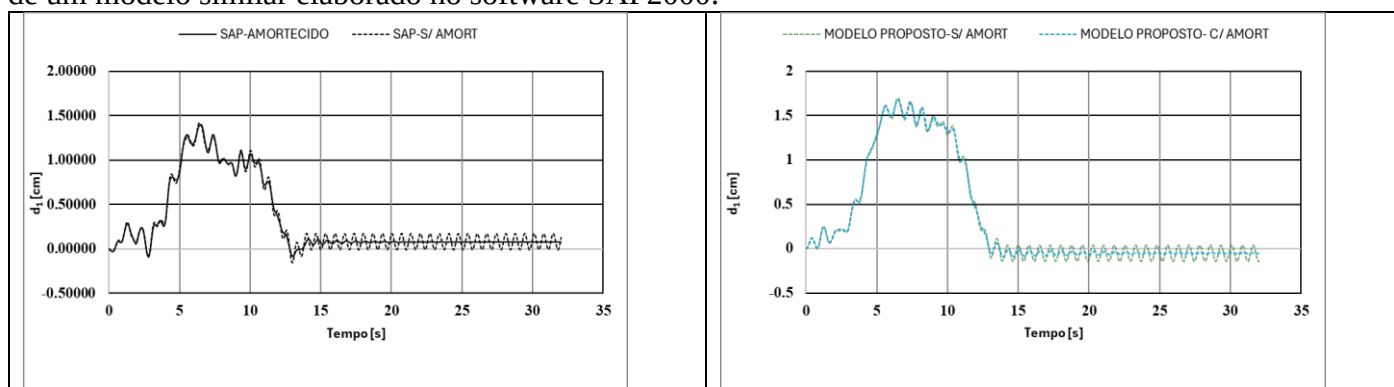


Figura 9 – Resultados do SAP2000 em termos do deslocamento na direção 1 do estudo de caso

Por simples inspeção do gráfico da Figura 9, podemos verificar que os deslocamentos transversais máximos, com todas as não linearidades apresentadas, teve um acréscimo de aproximadamente 18% em relação ao modelo dinâmico linear elaborado no SAP ($d_{1,máx-modelo\ proposto} = 1,67cm$ e $d_{1,máx-SAP} = 1,42cm$). É importante mencionar que devido à discretização adotada para os carregamentos, houve um pequeno resíduo após o instante $t = 14s$, onde a influência do trem-tipo tenderia a zero.

Conclusões

O modelo matemático proposto neste trabalho, baseado nas hipóteses cinemáticas de Timoshenko, apresenta uma descrição completa do movimento, gerando equações diferenciais altamente não lineares como visto ao longo do texto. A utilização do Método dos Elementos Finitos, para o modelo matemático proposto, é de fácil implementação e os resultados numéricos foram coerentes com a teoria clássica linear do programa computacional SAP2000, muito embora o estudo de caso apresentado tenha indicado significativa diferença percentual quando os efeitos da não linearidade geométrica foram incorporados. Todavia, demonstrou-se ser ainda assim uma solução exequível do ponto de vista dos deslocamentos obtidos.

Referências

- [1] BATHE K.J. – “FINITE ELEMENT PROCEDURES”, Prentice Hall, 1996.
- [4] NEWMARK, N. M. “A METHOD OF COMPUTATION FOR STRUCTURAL DYNAMICS”. ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 85 Nº EM3, 1959, pp. 67-94..
- [5] MAZZILLI C.E.N., ANDRÉ J.C., BUCALEM M.L., CIFÚ S. – “LIÇÕES EM MECÂNICA DAS ESTRUTURAS: DINÂMICA”, Blucher, 2016.
- [6] MAZZILLI C.E.N., ANDRÉ J.C., BUCALEM M.L., CIFÚ S. – “INTRODUÇÃO À DINÂMICA DAS ESTRUTURAS”, vol.2, Oficina de Textos, 2014.
- [8] MAZZILLI, C.E.N. and BARACHO NETO, O.G.P.– “MATRIX FORMULATION OF NON-LINEAR DYNAMICS”, VII Pan-American Congress of Applied Mechanics, 2002, Temuco. Vol 9. Pp 181-184.
- [9] CAMPELLO, E. “ANÁLISE NÃO-LINEAR DE PERFIS METÁLICOS CONFORMADOS A FRIO”. Dissertação de Mestrado.